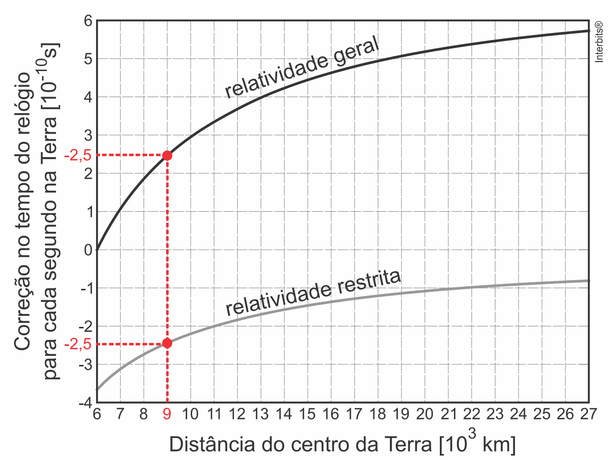
GABARITO

01|

A $v_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{2\pi R_{GPS}}{T_{GPS}} = \dfrac{2 \times 3 \times 27.000}{12} \Rightarrow$

$\boxed{v_m = 13.500 \text{ km/h} = 3.750 \text{ m/s.}}$

B Analisando o gráfico, nota-se que a compensação entre o adiantamento e o atraso ocorre para $R = 9 \times 10^3$ km, onde esses tempos são $+2,5 \times 10^{-10}$ e $-2,5 \times 10^{-10}$ conforme mostra o gráfico.



O tempo T para a órbita pode ser calculado aplicando a 3ª lei de Kepler, comparando as duas situações, órbita regular e órbita com compensação de tempos.

$$\left(\frac{T}{T_{GPS}}\right)^2 = \left(\frac{R}{R_{GPS}}\right)^3 \Rightarrow \frac{T^2}{12^2} = \left(\frac{9 \times 10^3}{27 \times 10^3}\right)^3 \Rightarrow$$

$$T^2 = \frac{144}{27} = \frac{16}{3} \Rightarrow T = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ h.}}$$

02|

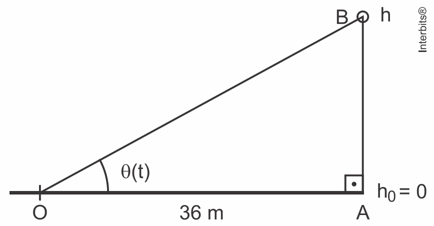
A A figura mostra as forças mencionadas no enunciado.

Como o balão sobe em movimento acelerado, E > P. Aplicando o Princípio Fundamental da Dinâmica:

$$E - P = m\,a \Rightarrow d_{ar} V g - mg = ma \Rightarrow$$

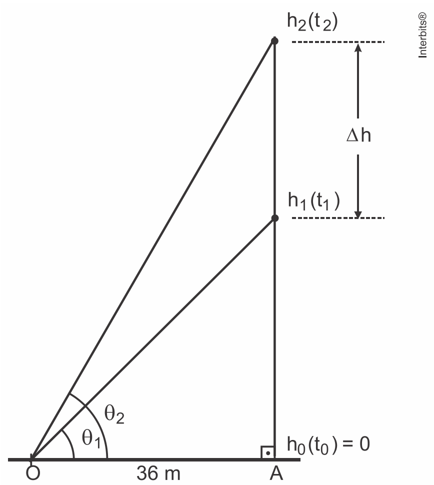
$$V = \frac{m(a+g)}{d_{ar}\, g} = \frac{90(2+10)}{1{,}2 \times 10} \Rightarrow \boxed{V = 90 \text{ m}^3.}$$

B Adotando origem de altura no solo e considerando velocidade inicial nula, a relação entre a altura h do balão e o ângulo θ,num instante t é:



$$\begin{cases} tg\theta = \dfrac{h - h_0}{36} \Rightarrow h = 36\, tg\theta. \quad (I) \\ h = h_0 + v_0 t + \dfrac{a}{2} t^2 \Rightarrow h = \dfrac{2}{2} t^2 \Rightarrow h = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{h}. \quad (II) \end{cases}$$

A figura mostra as posições do balão nos instante t_1 e t_2



Em (I):

$$h = 36\,\text{tg}\,\theta \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow h_1 = 36\,\text{tg}\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow h_1 = 36\, m. \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow h_2 = 36\,\text{tg}\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow h_2 = 36\sqrt{3}\, m. \end{cases}$$

Em (II):

$$t = \sqrt{h} \begin{cases} t_1 = \sqrt{36} \Rightarrow t_1 = 6\, s. \\ t_2 = \sqrt{36\sqrt{3}} \Rightarrow t_2 = 6\sqrt[4]{3}\ \text{s.} \end{cases}$$

A velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{36\sqrt{3} - 36}{6\sqrt[4]{3} - 6} = \frac{36\left(\sqrt{3}-1\right)}{6\left(\sqrt[4]{3}-1\right)} \Rightarrow v_m = \frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt[4]{3}-1\right)}.$$

Racionalizando a expressão acima:

$$v_m = \frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt[4]{3}-1\right)} \times \frac{\left(\sqrt[4]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{3}+1\right)} = \frac{6\left(\sqrt{3}-1\right) \times \left(\sqrt[4]{3}+1\right)}{\sqrt{3}-1} \Rightarrow v_m = 6\left(\sqrt[4]{3}+1\right) m/s.$$

Aproximando os valores:

$$v_m = 6(1{,}32+1) \Rightarrow \boxed{v_m = 13{,}9\ \text{m/s}.}$$

03|

A Desprezando a resistência do ar e considerando que a velocidade é nula no início da descida ($v_0 = 0$) e no final da subida ($v_3 = 0$), pela equação de Torricelli, têm-se:

$$\begin{cases} \text{Queda: } v_1^2 = v_0^2 + 2gh_i \ \Rightarrow\ v_1^2 = 0 + 2gh_i \ \Rightarrow\ v_1 = \sqrt{2gh_i} \\ \text{Subida: } v_3^2 = v_2^2 - 2gh_f \ \Rightarrow\ 0 = v_2^2 - 2gh_f \ \Rightarrow\ v_2 = \sqrt{2gh_f} \end{cases}$$

O coeficiente de restituição (e) é:

$$e = \left|\frac{v_2}{v_1}\right| = \frac{\sqrt{2gh_f}}{\sqrt{2gh_i}} = \sqrt{\frac{h_f}{h_i}} = \sqrt{\frac{2}{50}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} \ \Rightarrow\ \boxed{e = 0{,}2.}$$

B Estimando a massa da gota:

Considerando uma gota de diâmetro D = 3 mm = 3 x 10^{-1} cm e a densidade da água d_a = 1 g/cm³ e π = 3, a massa da gota é:

$$m_g = d_a V_g = d_a \times \frac{\pi D^3}{6} = 1 \times \frac{3\left(3\times10^{-1}\right)^3}{6} \ \Rightarrow\ m_g = 13{,}5\times10^{-3}\ g.$$

Para simplificar, esse valor pode ser arredondado para

$$mg = 15 \text{ x } 10^{-3} \text{ g.}$$

Calculando a massa de lodo capturada (m):

$$m = \sigma A = 2{,}5\times10^{-3}\times2 \Rightarrow \boxed{m = 5\times10^{-3}\ g.}$$

A situação pode ser assimilada a um choque inelástico entre a gota e o lodo. Então, pela conservação da Quantidade de Movimento:

$$Q^i_{sist} = Q^f_{sist} \Rightarrow m_g v_i = (m_g + m)v_f \Rightarrow (15\times10^{-3})(3) = (15+5)\times10^{-3} v_f \Rightarrow$$

$$\boxed{v_f = 2{,}25\ mm/s.}$$

04|

A A densidade é a razão entre a massa e o volume: $d = \dfrac{M}{V}$.
Se as densidades fossem iguais:

$$d_P = d_T \Rightarrow \frac{M_P}{V_P} = \frac{M_T}{V_T} \Rightarrow \frac{\alpha M_T}{\frac{4}{3}\pi\left(\beta R_T\right)^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta^3} = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta^3.}$$

B A gravidade na superfície de um planeta esférico é: $g = \dfrac{GM}{R^2}$.

$$\left.\begin{cases} g_P = \dfrac{G M_P}{R_P^2} \Rightarrow g_P = \dfrac{G\,\alpha\, M_T}{\left(\beta R_T\right)^2} \Rightarrow g_P = \dfrac{\beta^3\, G M_T}{\beta^2 R_T^2} \Rightarrow g_P = \dfrac{\beta\, G M_T}{R_T^2} \\ g_T = \dfrac{G M_T}{R_T^2} \end{cases}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{r_P = \frac{g_P}{g_T} = \beta.}$$

C O período do pêndulo simples é:

$$T = 2\pi\left(\frac{L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$r_t = \frac{t_P}{t_T} \Rightarrow r_t = \frac{2\pi}{2\pi}\left(\frac{L}{g_P}\times\frac{g_T}{L}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g_T}{g_P}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r_t = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{r_t = \frac{1}{\beta^{1/2}}.}$$

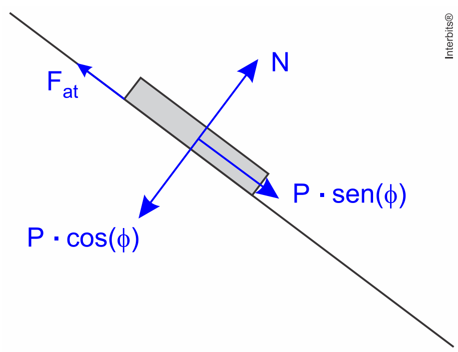
D A velocidade é:

$$v = \frac{L}{t}.$$

$$r_v = \frac{v_P}{v_T} = \frac{L}{t_P}\times\frac{t_T}{L} = \frac{t_T}{t_P} \Rightarrow \boxed{r_v = \beta^{1/2}.}$$

05|

A No ponto B, temos o seguinte diagrama de forças atuando sobre o sistema menino/caixa:



Assim, podemos equacionar de forma que:

$$F_{at} = \mu\cdot N = \mu\cdot P\cdot\cos\theta = \mu\cdot m\cdot g\cdot\cos\theta$$
$$F_{at} = 0{,}25\cdot40\cdot10\cdot0{,}8$$
$$F_{at} = 80\ N$$

B Pelo teorema da Energia Cinética, temos que:

$$\Delta E_c = \tau_{total} = \tau_{potencial} - \tau_{atrito}$$

Do enunciado, podemos encontrar a altura do ponto A em relação ao ponto C:

$$sen\theta = \frac{h}{AC}$$
$$h = 0{,}6\cdot10$$
$$h = 6\ m$$

A força de atrito entre os pontos C e D é diferente da calculada no item anterior, pois a força normal não é a mesma. Assim

$$F_{at}' = \mu\cdot N = \mu\cdot P = 0{,}25\cdot40\cdot10$$
$$F_{at}' = 100\ N$$

Com os valores das grandezas calculados, podemos continuar a desenvolver a equação do teorema da energia cinética.

$$\Delta E_c = \tau_{total} = \tau_{potencial} - \tau_{atrito}$$
$$E_{c_f} - E_{c_i} = \tau_{potencial} - \left(\tau_{atrito_{AC}} + \tau_{atrito_{CD}}\right)$$
$$0 - \frac{m\cdot v_A{}^2}{2} = m\cdot g\cdot h - \left(F_{at}\cdot AC + F_{at}'\cdot CD\right)$$
$$-\frac{40\cdot 1^2}{2} = 40\cdot 10\cdot 6 - \left(80\cdot 10 + 100\cdot CD\right)$$
$$-20 = 2400 - 800 - 100\cdot CD$$

Assim, a distância total percorrida (d) é de:

$$d = AC + CD = 10 + 16{,}2$$
$$d = 26{,}2\,m$$

06| D

Em toda colisão $\vec{Q}_{total}$ constante

$$m_A(\vec{V}_0)_A + m_B\left(\vec{V}_0\right)_B = m_A\vec{V}_A + m_B\vec{V}_B$$

Como as massas são iguais, vem:

$$(\vec{V}_0)_A + \left(\vec{V}_0\right)_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B$$

Adotando orientação positiva para a esquerda, vem:

$$2V_0 - V_0 = V_A + 0 \rightarrow V_A = V_0$$

$$E_2 = \frac{1}{2}MV_0^2$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}MV_0^2}{\frac{5}{2}MV_0^2} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \rightarrow E_2 = 0{,}2E_1$$

07| B

Como a mancha branca parece estar parada, a frequência de rotação da polia deve ser um número múltiplo das frequências de 9 Hz e 12 Hz. E o menor valor para o qual isto é possível deve ser o mínimo múltiplo comum entre eles:

$$mmc(9,12) = mmc\left(3^2, 3\cdot 2^2\right) = 3^2\cdot 2^2 = 36$$

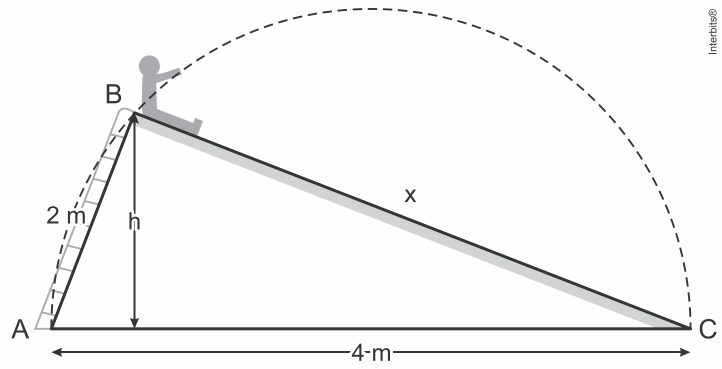
Sendo assim, a sua frequência é de:

$$f = 36\,Hz = 36\cdot 60\,rpm$$
$$\therefore f = 2160\,rpm$$

Obs: rpm é unidade de frequência e não de velocidade angular.

08| C

Da trigonometria sabemos que todo o triangulo inscrito em uma semicircunferência é um triangulo retângulo. Assim com o teorema de Pitágoras e uma relação métrica no triangulo retângulo descobrimos a altura do ponto B.



Usando o Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 2^2 = 4^2$$
$$x^2 = 16 - 4$$
$$x = \sqrt{12} \therefore x = 2\sqrt{3}\,m$$

Com a relação métrica do triângulo retângulo tiramos a altura, pois o produto da altura pela hipotenusa é igual ao produto dos catetos, então ficamos com:

$$h\cdot 4 = 2\cdot 2\sqrt{3} \therefore h = \sqrt{3}\,m$$

Da energia potencial gravitacional, temos:

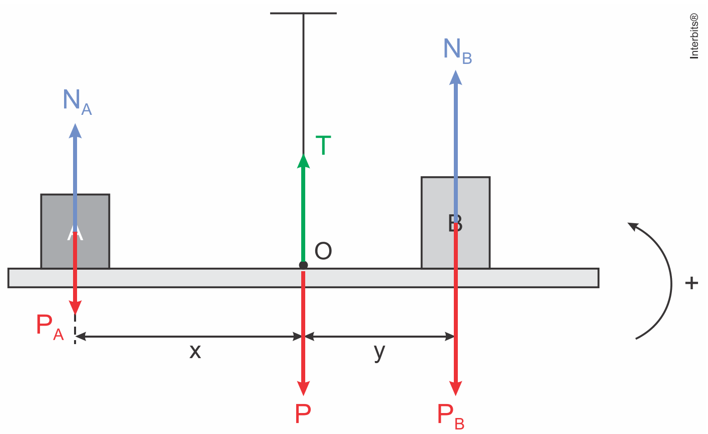
$$E_{pg} = m\cdot g\cdot h$$
$$m = \frac{E_{pg}}{g\cdot h}$$

Substituindo os valores fornecidos e a altura encontrada, teremos condições de achar a massa da criança.

$$m = \frac{342\,J}{5{,}7\sqrt{3}\,m/s^2\cdot\sqrt{3}\,m}$$
$$\therefore m = 20\,kg$$

09| A

As equações de equilíbrio estático são obtidas do diagrama de forças:



O equilíbrio rotacional é dado pela soma dos momentos igual a zero.

$$\sum M = 0$$
$$P_A \cdot x - N_A \cdot x + N_B \cdot y - P_B \cdot y = 0$$
$$P_A \cdot x - P_B \cdot y = N_A \cdot x - N_B \cdot y$$

Como os pesos são iguais em módulo às reações normais:

$$P_A = N_A \text{ e } P_B = N_B$$

então

$$N_A \cdot x - N_B \cdot y = 0$$

Esse resultado é justamente o determinante da matriz M ou da matriz M^t que são iguais:

$$\det(M) = \det(M^t) = N_A \cdot x - N_B \cdot y = 0$$

Portanto, a alternativa correta é da letra [A].

10| **B**

Entre dois solstícios consecutivos, verão e inverno são 6 meses, aproximadamente, 180 dias, intervalo de tempo em que a nascente do Sol desloca-se 300 m.

Assim:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \cong \frac{300}{180} \Rightarrow \boxed{v_m \cong 1{,}6\ m/dia.}$$